Pythagoräische Pumpen
Wie man eine Knobelaufgabe so richtig ausquetscht

Kinoabend. Ein Neuntklässler aus dem benachbarten Gymnasium hat mitgekriegt, dass ich Mathelehrer bin und fragt mich um Rat wegen eines Problems, das er und seine Mitschüler nicht lösen konnten: Ein Wasserbecken wird mit zwei Pumpen befüllt, die dafür gemeinsam 12 Stunden benötigen. Betriebe man sie einzeln, wäre die schnelle Pumpe 10 Stunden eher fertig als die langsame.

1. Aufgabe: *Wie lange bräuchten die beiden Pumpen im Einzelbetrieb zur Füllung des Beckens?*

Während des Kinofilms war ich also zum Knobeln gezwungen, durfte mir natürlich keine Blöße geben. Dummerweise hatte ich 8 statt 10 Stunden in Erinnerung und kam auf keine ganzzahlige Lösung. Aber genau dies war mir hinterher Anlass, über das Problem noch etwas gründlicher nachzudenken. Mit dem Ergebnis: Die Zeit für die langsame Pumpe entspricht dem Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der gemeinsamen Füllzeit (im Beispiel: 12) und dessen andere Kathete der halben Differenzzeit (im Beispiel: 10:2 = 5) entspricht.

2. Aufgabe: *Man beweise, dass dieser Zusammenhang für beliebige gemeinsame Füllzeiten und Differenzzeiten gilt.*

Über diese Entdeckung war ich einigermaßen verblüfft und zugleich ratlos: Was hat eine Zeit mit Pythagoras und einer dreifach geknickten Strecke (dem Umfang) zu tun? Manche geometrischen Modellierungen sind unmittelbar anschaulich, diese jedoch war es nicht.

3. und schwierigste Aufgabe: *Man finde eine plausible geometrische Modellierung des Pumpenproblems.*

Hoffnungsvoll wandte ich mich an den Mathematiker und Mensaner Kai-Uwe Nierbauer, der mir schon einmal geholfen hatte (bei der Frage, woher das Rätsel aus der Waldbär-fabula („Weihnachtsrätsel 2001") ursprünglich stammte). Und tatsächlich schaffte er es, im Zuge eines geometrischen Beweises für meine Behauptung die geknickte Strecke „gerade zu bügeln".

Aufgabe 3.1 : *Man beweise, dass in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten den Einzelfüllzeiten entsprechen, die gemeinsame Füllzeit gerade der Seitenlänge des größtmöglichen einbeschriebenen Quadrats entspricht.*

In seiner Beweisfigur tauchte auch noch die Zeit für die *schnelle* Pumpe als einfache Strecke auf. Aber leider stand sie genau senkrecht zur Zeit für die langsame Pumpe. Üblicherweise kann man in geometrischen Darstellungen zeitlicher Abläufe die Zeit auf ein- und derselben Achse ablesen. Nun war ich wieder am Zug, das erfolgreiche Mensa-Teamwork abzurunden.

<u>Aufgabe 3.2 :</u> *Man versuche, aus der Dreiecksfigur ein geometrisches Modell zu entwickeln, bei dem alle Füllzeiten in die gleiche Richtung („Zeit-Achse“) zeigen.*

Tja, so wurde aus der einen „harmlosen“ Knobelaufgabe ein ganzes Set von auseinander hervorgehenden Problemen mit steigendem Schwierigkeitsgrad.
Aber bitteschön: Erst selbst knobeln, bevor Ihr bei den Lösungen (weiter unten) nachschaut!

Lösung zur 1. Aufgabe:

Das gestellte Problem lässt sich mit einer Bruchgleichung beschreiben. Sei x die Zeit für die schnelle und y die Zeit für die langsame Pumpe. Dann gilt:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \quad (*)$$

Denn: Lässt man beide Pumpen zwölf Stunden laufen, füllen sie das gesamte Becken. Dabei hat die schnelle Pumpe den Anteil $\frac{12}{x}$ zur Gesamtfüllung beigetragen, weil sie eben im Einzelbetrieb x Stunden für das Becken bräuchte. Analog hat die langsame Pumpe den Anteil $\frac{12}{y}$ beigetragen, beide Anteile zusammen ergeben 100% der Füllmenge, also 1.

Nur für $x = 20$ und $y = 30$ sind die Gleichung und die Bedingung $y - x = 10$ zugleich erfüllt, wie man entweder durch Raten oder durch Lösen der Gleichung ermittelt.

Dividiert man die Gleichung $(*)$ durch die gemeinsame Füllzeit 12, so erhält man:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

Formeln dieser Art tauchen in der Physik häufiger auf, z.B. bei der Linsengleichung und bei Widerständen in verzeigten Stromkreisen. Das macht die geometrischen Aspekte dieser Aufgabe besonders interessant.

Lösung zur 2. Aufgabe:

Sei $d = y - x$ die Differenzzeit und a die Zeit, welche beide Pumpen gemeinsam benötigen. Definiert man nun noch $b = \frac{d}{2}$ als halbe Differenzzeit und ersetzt in der Ausgangsgleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ die Zeit x für die schnelle Pumpe durch $y - d = y - 2 \cdot b$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{y-2\cdot b}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

Nach Erweitern auf den Hauptnenner und Multiplikation mit demselben ergibt sich (nach Umformungen) die quadratische Gleichung

$$y^2 - 2\cdot(a + b)\cdot y + 2\cdot a\cdot b = 0$$

mit den Lösungen $y_{1/2} = a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 2\cdot a\cdot b} = a + b \pm \sqrt{a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 - 2\cdot a\cdot b}$

Wegen $y = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} < a + b - \sqrt{b^2} = a$ kann man die Minuslösung vergessen, da ja die Zeit für eine Pumpe nicht kleiner sein kann als die beider Pumpen zusammen.

Also beträgt die Zeit für die langsame Pumpe:

$$\boxed{y = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = a + b + c}$$

Und man erkennt sofort, dass – nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras – die drei Summanden den beiden Katheten (a , b) und der Hypothenuse (c) eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechen, zusammen also dem Umfang.

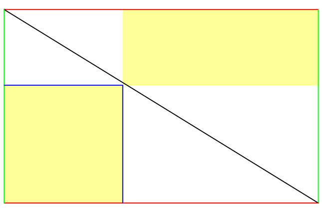
Für die schnelle Pumpe ergibt sich nach Subtraktion der Differenzzeit $2\cdot b$:

$$x = a - b + \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ganzzahlige Lösungen gibt es demnach nur, wenn die beiden Quadratzahlen a^2 und b^2 zusammen wieder eine Quadratzahl ergeben. Gefragt sind also sogenannte Pythagoräische Tripel, im Beispiel $a = 12$, $b = 5$ (halbe Differenzzeit) und $c = 13$, denn $12^2 + 5^2 = 13^2$.

Lösung zur Aufgabe 3.1 :

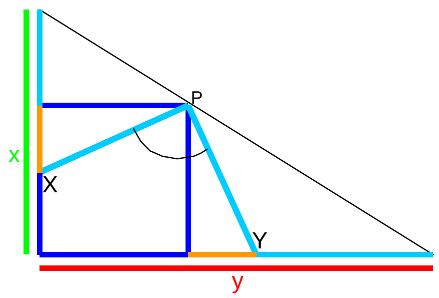
Unsere bereits bekannte Gleichung $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$ lässt sich, das wissen die Physiker, zur eleganten Formel $a = \frac{x\cdot y}{x+y}$ („Produkt durch Summe“) umwandeln. Und eben diese erhält man auch aus der Figur mit dem rechtwinkligen Dreieck (Kathetenlängen x und y) und dem einbeschriebenen Quadrat der Seitenlänge a :



Wie man leicht einsieht, sind die beiden gelben Flächen gleich groß: $a^2 = (y - a)\cdot(x - a)$

Hieraus folgt nun aber (ausmultiplizieren, Gleichung vereinfachen) die oben angegebene Formel $a = (x\cdot y) : (x + y)$. Ein anderer möglicher Beweis benutzt den zweiten Strahlensatz.

Übrigens lässt sich, wie Kai-Uwe Nierbauer mir nebenbei demonstriert hat, anhand der Dreiecksfigur auch die eingerahmte Gleichung von oben beweisen, mit der meine Suche angefangen hatte:



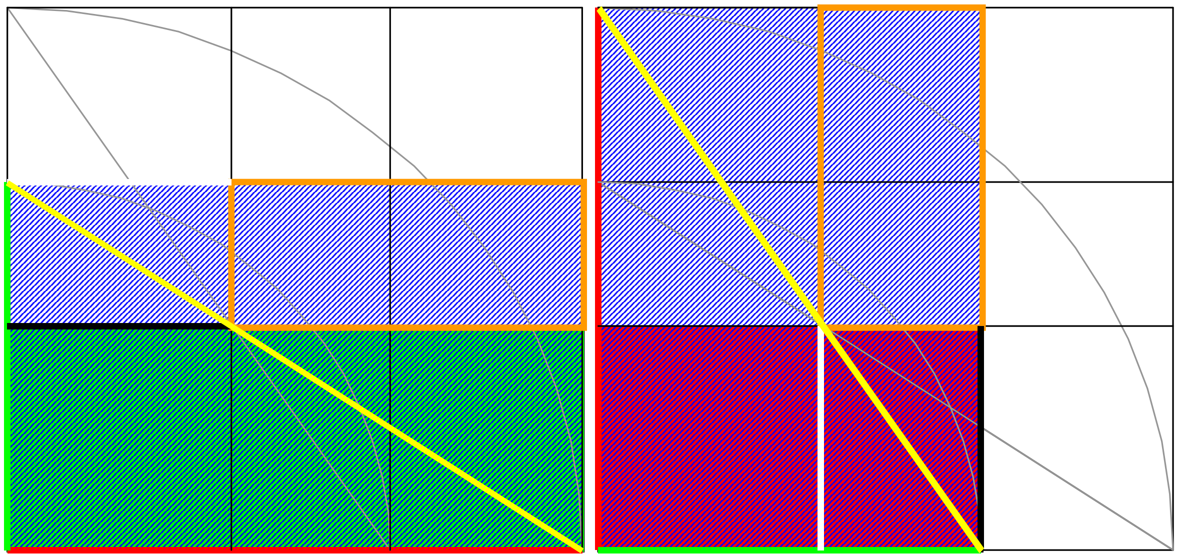
Wenn X und Y auf den Strecken x und y jene Punkte sind, welche jeweils die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks bilden, deren Basis im Punkt P beginnt bzw. endet, dann ist der eingezeichnete Winkel ein rechter. Damit haben beide orange gefärbten Strecken die gleiche Länge b, alle vier hellblauen Schenkel haben die gleiche Länge c, und es gelten folgende Beziehungen:

$$b = (y - x) : 2 \qquad c^2 = a^2 + b^2 \qquad \boxed{y = a + b + c}$$

<u>Lösung zur Aufgabe 3.2 :</u>

Die Idee hinter der nächsten Grafik ist folgende: Wenn man verschiedene Pumpen ein bestimmtes Becken füllen lässt, dann ist die sich einstellende „Pegelgeschwindigkeit“ umgekehrt proportional zur Füllzeit: Bei einer Pumpe, die doppelt so lange benötigt, steigt der Pegel nur halb so schnell. Wenn man nun die Füllzeiten durch bestimmte Streckenmaße darstellen möchte, kann man das auch für die Pegelgeschwindigkeiten (PG) tun. Bei genau zwei Pumpen darf man die Einheiten für die PG gerade so wählen, dass die PG-Strecke der einen Pumpe genau der Füllzeit-Strecke der anderen Pumpe entspricht. Umgekehrt gilt automatisch das Gleiche, denn das Produkt aus Füllzeit und PG ist bei jeder Pumpe ein Maß für das (in beiden Fällen gleiche) Volumen des Beckens:

schnelle Pumpe: Füllzeit, Pegelgeschwindigkeit   langsame Pumpe: Füllzeit, Pegelgeschwindigkeit



Auf den Hochachsen sei jeweils die Zeit dargestellt, auf den Längsachsen die Pegelgeschwindigkeit. Letztere ist für jede der beiden Pumpen ein konstanter Wert, ebenso wie die Füllzeit für das vorgegebene Becken. Da das Volumen des Beckens proportional ist zum Produkt aus Pegelgeschwindigkeit und Füllzeit, lässt sich das Volumen als Fläche im Koordinatensystem darstellen. Wegen der Antiproportionalität von Pegelgeschwindigkeit und Füllzeit bei einer Pumpe ist die Füllzeit der *einen* Pumpe proportional zur Pegelgeschwindigkeit der jeweils *anderen*, so dass sich beide Größen durch dasselbe Streckenmaß darstellen lassen und infolgedessen beide blau schraffierten Flächen gleich groß werden. Damit sind sie ein Maß für das Volumen des zu füllenden Beckens. Nach Ablauf der Zeit, die beide Pumpen gemeinsam zur Füllung des Beckens benötigen, hat die schnellere Pumpe ein Volumen beigesteuert, welches der grünen Fläche entspricht, der Anteil der langsamen Pumpe ist durch die rote Fläche dargestellt. Zu zeigen ist nun, dass die grüne und die rote Fläche sich genau dann zur blauen Gesamtfläche addieren, wenn sie gemäß der obigen Darstellung konstruiert werden (wobei dann ja die Seitenhöhe des Quadrats links unten gerade der Füllzeit bei gemeinsamem Betrieb entspricht, denn die beiden Pegelgeschwindigkeiten addieren sich ja bei gemeinsamem Betrieb, und das ist hier nun wirklich anschaulich, wenn man den Spalt zwischen den Koordinatensystemen zusammenschiebt).

Beweis: Die gelben Diagonalen teilen die blaue Fläche in zwei Hälften, woraus sich die Flächengleichheit der Quadrate links unten mit den beiden (zueinander kongruenten) orange umrandeten Rechtecken ergibt. Also passt zum Beispiel das rote Quadrat in das orangene Rechteck über der grünen Fläche, und da die beiden dick schwarzweiß geränderten Rechtecke ebenfalls kongruent sind, lässt sich die grüne Fläche durch die rote zur blau schraffierten auffüllen.

Bedeutung der Geometrisierung

Nach all diesen z.T. sehr speziellen Überlegungen mag sich manch einer fragen, wozu das Ganze gut ist. Ich würde sagen: Nichts verschafft einen tieferen Einblick in die Nützlichkeit von Mathematik als die Auseinandersetzung mit der Anwendbarkeit / dem Realitätsbezug mathematischer Modelle. Die oben gewonnenen Erkentnisse lassen sich beispielsweise in verschiedenen Gebieten der Physik anwenden.

Schon jedem Grundschüler ist unmittelbar einsichtig, dass man die Gleichung $x + y = a$ geometrisch darstellen kann, nämlich durch Hintereinanderhängen der Strecken x und y, woraus sich dann die Gesamtstrecke a ergibt.

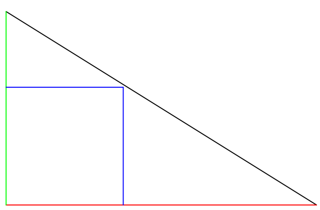
Aber wer weiß schon, wie man die Kehrwertgleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ geometrisieren kann ??

Da wohl kaum ein Mensch intuitiv in der Lage ist, a zu schätzen, wenn er x und y kennt (es sei denn, sie sind gleich groß) ist doch eine geometrische Veranschaulichung etwas sehr Nützliches, zumal genau solche Gleichungen in der Physik ständig auftauchen:

Linsengleichung	parallele Widerstände	Arbeitszeiten zur Erfüllung einer bestimmten Aufgabe bei konstanter Leistung (z.B. bei Pumpen)
$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{gesamt}}$	$\frac{1}{t_{1,allein}} + \frac{1}{t_{2,allein}} = \frac{1}{t_{beide}}$

Es schadet wohl nicht, wenn ich hier das wichtigste (und vom speziellen Pumpen-Problem unabhängige) Ergebnis noch einmal wiederhole:

a ergibt sich als Seitenlänge desjenigen Quadrats, welches dem rechtwinkligen Dreieck einbeschrieben ist, das von den Katheten x und y aufgespannt wird !!



Beweis: siehe weiter oben (Lösung zur Aufgabe 3.1).